Exposé 65 : Fonction reciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Exemple.

Pre requis :

- notion d'intervalle
- bijection
- continuité et derivabilité d'une fonction
- theoreme des valeurs intermediaires

dans tout l'exposé, I designe un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On note $C_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues et strictement monotones sur I.

1) Fonction reciproque

Theoreme : Si $f \in C_m(I)$ alors f realise une bijection sur $f(I)$

Preuve : $f(I)$ est un intervalle d'apres le theoreme des valeurs intermédiaires
$f : I \to f(I)$ est surjective par construction
Soit $(x_1, x_2) \in I^2$, supposons f strictement croissante (on change le sens des inegalité si elle est strictement decroissante, ou on considere $-f$ qui sera alors strictement croissante)
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ donc f injective.

Definition : Soit $f \in C_m(I)$. L'application qui a tout $y \in f(I)$ associe son unique antecedent par la fonction f est appelée fonction reciproque de f . On la note f^{-1}

Remarque :

$$\begin{pmatrix} y = f(x) \\ x \in I \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{pmatrix}$$

Si $f \in C_m(I)$ alors $f^{-1} \circ f = Id_I$ et $f \circ f^{-1} = Id_{f(I)}$

Preuve (si le jury le demande)
$x \in I, y \in f(I)$ tel que $y = f(x); x = f^{-1}(y)$
$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1} \circ f = Id_I$

2) Propriete de la fonction reciproque

a) Sens de variation

Proposition : Si $f \in C_m(I)$ alors f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

Preuve : cas où f est strictement croissante sur I

Soient $(y_1, y_2) \in (f(I))^2$ tel que $y_1 < y_2$. On pose $x_1 = f(y_1), x_2 = f(y_2)$

$y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

L'implication du milieu vient du fait que f est croissante donc $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ or si on prend la contraposé on a $f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow x_2 \leq x_1$.

b) Continuité

Lemme : Soit $f \in C_m(I)$. $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue sur I.

Preuve : cela vient du fais que l'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Propriété : Si $f \in C_m(I)$ alors f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Preuve (à faire) :

f est continue et strictement monotone sur I donc f est bijective de I sur $f(I)$.

f continue implique $J = f(I)$ est un intervalle, or f^{-1} existe et est strictment monotone d'où $f^{-1}(J) = I$, intervalle, ce qui entraine f^{-1} continue.

Exemple : $f : \left(\begin{array}{c} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin x \end{array} \right)$

c) Dérivabilité

Theoreme : Soit $f \in C_m(I)$ et $x_o \in I$ tel que f soit derivable en x_o et $f'(x_o) \neq 0$ Alors f^{-1} est dérivable en $y_o = f(x_o)$ et on a

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

Remarque : il se peut que f ne soit pas derivable en un point et que f^{-1} le soit. Sur le graphe , f aura une tangente verticale, et donc f^{-1} une tangente horizontale.

Preuve (du theoreme) :

Montrons que $\lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \frac{1}{f'(x_o)}, f'(x_o) \neq 0$

La fonction f étant dérivable en x_o, on a $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, comme f^{-1} est continue en y_o, le théoreme de compositions de limites donne :

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_o)}{f^{-1}(y) - x_o} = \lim_{y \to y_o} \frac{y - y_o}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}$$

Cette limite etant supposée non nulle, d'apres le theoreme de l'inverse d'une limite,on a (en fait c'est le theoreme des compositions de fonction avec la fonction inverse, sur un point non nul donc ou la fonction onverse est definie)

$$\lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \frac{1}{f'(x_o)}, f'(x_o) \neq 0$$

Exemple :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{(\tan y)'}$$

$\tan y = x$

$y = \arctan x$

d) Graphe

Soit $f \in C_m(I)$

Graphe de f $:= G_f = \{(x, f(x); x \in I\}$

Graphe de f^{-1} $:= G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)); y \in f(I)\} = \{(f(x), x); x \in I\}$

$G_{f^{-1}}$ est donc le symetrique de G_f par rapport à la 1ere bissectrice

Dessin

3) Exemple

a) Fonction exponentielle et logarithme neperien.

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ exp est continue et strictmenent monotone sur $\mathbb{R}$

$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

Elle admet une fonction reciproque qui est $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R}, e^x = y) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}_+^*, x = \ln y)$

dessin

b) Fonction tangente et arctangente

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, tan est continue et strictement monotone sur cet intervalle.

$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$, elle admet donc une fonction reciproque notée arctan.

$\arctan:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\tan x=y\right)\Leftrightarrow\left(\forall y\in\mathbb{R},\arctan y=x\right)$

dessin